Pregunta 1 (10 puntos) Considere la función $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \alpha e^{2x} \text{ si } x < 0 \\ \beta e^{3x} \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$$

Halle los valores de las constantes α y β que hacen que f satisfaga la ecuación:

$$f''gen(x) - f'gen(x) - 2f(x) - 4\beta e^{3x} H(x) = 0 \tag{1}$$

<u>**Solución**</u>

Hallaremos la expresión de $f''gen(x)$ y $f'gen(x)$ para sustituirlas en la ecuación (1). Así,

$$f'gen(x) = f'clás(x) + sf(0)\delta(x)$$

$$f'clás(x) = \begin{cases} 2\alpha e^{2x} \text{ si } x < 0 \\ 3\beta e^{3x} \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$$

Podemos reescribir $f'clás(x)$ de la siguienta manera:

$$f'clás(x) = 2\alpha e^{2x} H(-x) + 3\beta e^{3x} H(x)$$

Calculamos el valor del salto en $x = 0$.

$$sf(0) = \lim_{x \longrightarrow 0^+} f(x) - \lim_{x \longrightarrow 0^-} f(x) = \beta - \alpha$$

$$f'gen(x) = 2\alpha e^{2x} H(-x) + 3\beta 3^{3x} H(x) + (\beta - \alpha)\delta(x)$$

Derivamos nuevamente de forma generalizada:

$$f''gen(x) = f''clás(x) + (\beta - \alpha)\delta'(x) + sf'(0)\delta(x)$$

$$f''clás(x) = \begin{cases} 4\alpha e^{2x} \text{ si } x < 0 \\ 9\beta e^{3x} \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$f''clás(x) = 4\alpha e^{2x} H(-x) + 9\beta e^{3x} H(x)$$

Calculamos el valor del salto en $x = 0$.

$$sf'(0) = \lim_{x \longrightarrow 0^+} f'(x) - \lim_{x \longrightarrow 0^-} f'(x) = 3\beta - 2\alpha$$

Así,

$$f''gen(X) = 4\alpha e^{2x} H(-x) + 9\beta e^{3x} H(x) + (\beta - \alpha)\delta'(x) + (3\beta - 2\alpha)\delta(x)$$

Reescribiendo también $f(x)$ obtenemos:

$$f(x) = \alpha e^{2x}H(-x) + \beta e^{3x}H(X)$$

Sustituimos las expresiones halladas en la ecuación (1) y simplificamos (el color indica cómo se simplifica):

$$f''gen(x) - f'gen(x) - 2f(x) - 4\beta e^{3x}H(x) = 0 \implies$$

$$\begin{gathered}
4\alpha e^{2x}H(-x) + 9\beta e^{3x}H(x) + (\beta-\alpha)\delta'(x) + (3\beta - 2\alpha)\delta(x) \\
-[2\alpha e^{2x}H(-x) + 3\beta 3^{3x}H(x) + (\beta-\alpha)\delta(x)] \\
-2[\alpha e^{2x}H(-x) + \beta e^{3x}H(X)] - 4\beta e^{3x}H(x) = 0
\end{gathered}$$

Simplificando, obtenemos:

$$(\beta-\alpha)\delta'(x) + (3\beta-2\alpha)\delta(x) - (\beta-\alpha)\delta(x) = 0 \implies$$

$$(\beta-\alpha)\delta'(x) + (2\beta-\alpha)\delta(x) = 0$$

Buscamos los valores de α y β aplicando coeficientes indeterminados y obtenemos la respuesta al enunciado:

$$\begin{cases} \beta - \alpha = 0 \\ 2\beta - \alpha = 0 \end{cases} \implies$$

$$\beta = \alpha \implies$$

$$2\beta - \beta = 0 \implies$$

$$\boxed{\beta = 0} \qquad \boxed{\alpha = 0} \tag{2}$$

Pregunta 2 (13 puntos) Sea g la función $g(t) = H(t)senh(t)$. Halle una función generalizada que satisfaga:

$$(f * g)(t) = H(t+1)[t + 1 - senh(t+1)] + H(t)\int_0^{+\infty} xe^{-2x}sen(x)\,dx$$

<u>Solución</u>

Usamos transforma de Laplace para resolver

$$\int_0^{+\infty} xe^{-2x}sen(x)\,dx$$

Recordemos que:

$$\mathscr{L}\Big(xsen(x)H(x)\Big)(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} xH(x)sen(x)e^{-zx}\,dx = \int_{0}^{+\infty} xsen(x)e^{-zx}\,dx$$

Nótese que en nuestro caso $\boxed{z=2} \rightarrow \displaystyle\int_{0}^{+\infty} xsen(x)e^{-2x}\,dx$

Por lo tanto,

$$\int_{0}^{+\infty} xe^{-2x}sen(x)\,dx = \mathscr{L}\Big(xH(x)sen(x)\Big)(z=2) = -\frac{d}{dz}\Big(\mathscr{L}\Big(H(x)sen(x)\Big)(z)\Big)\,\Big|_{z=2}$$

$$= -\frac{d}{dz}\Big(\frac{1}{z^2+1}\Big)\,\Big|_{z=2} = \frac{2z}{(1+z^2)^2}\,\Big|_{z=2} = \frac{4}{25}$$

Sustituyendo en la ecuación de convolución obtenemos:

$$(f*g)(t) = (t+1)H(t+1) - senh(t+1)H(t+1) + \frac{4}{25}H(t)$$

Aplicamos transformada de Laplace a ambos lados de la ecuación, tomando $\rightarrow \mathscr{L}[f(x)] = F(z)$

$$F(z).\Big(\mathscr{L}\Big(g(t)\Big)(z)\Big) = \frac{e^z}{z^2} - \frac{e^z}{z^2-1} + \frac{4}{25}.\frac{1}{z}$$

Como $g(t) = H(t)senh(t) \rightarrow \mathscr{L}\Big(g(t)\Big)(z) = \dfrac{1}{z^2-1}$

$$\frac{F(z)}{z^2-1} = -\frac{e^z}{z^2(z^2-1)} + \frac{4}{25}.\frac{1}{z} \rightarrow F(z) = -\frac{e^z}{z^2} + \frac{4}{25}\frac{(z^2-1)}{z}$$

$$\rightarrow F(z) = -\frac{e^z}{z^2} + \frac{4}{25}\Big(z - \frac{1}{z}\Big)$$

Aplicando transformada inversa de Laplace:

$$\boxed{f(t) = -(t+1)H(t+1) + \frac{4}{25}\big(\delta'(t) - H(t)\big)}$$

Pregunta 3 (13 puntos) Obtenga una solución causal de la siguiente ecuación que cumpla $f(0) = 1$. Si,

$$xf'(x) + 2\int_0^x f(t)sen(x-t)\,dt = 0 \text{ (para x > 0)}$$

<u>Solución</u>

Multiplicamos a ambos lados por Heaviside $H(x)$

$$xf'(x)H(x) + 2H(x)\int_0^x f(t)sen(x-t)\,dt = 0$$

Recordemos que, si $F(x) = f(x)H(x-a)$ y $G(x) = g(x)H(x-b)$, la convolución entre F y G será

$$(F * G)(x) = H(x-a-b)\int_b^{x-a} f(t)g(x-t)dt$$

En nuestro caso, $F(x) = f(x)H(x)$, $G(x) = sen(x)H(x)$ y $a = b = 0$
Por lo tanto,

$$xf'(x) + 2[f(x)H(x) * sen(x)H(x)] = 0 \quad \text{(I)}$$

Hacemos $f(x)H(x) = u(x)$, entonces

$$u'_{gen}(x) = f'(x)H(x) + f(0)\delta(x) \longrightarrow u'_{gen}(x) = f'(x)H(x) + \delta(x)$$

Así,

$$f'(x)H(x) = u'_{gen}(x) - \delta(x)$$

Sustituyendo en la ecuación (I)

$$x\left(u'_{gen}(x) - \delta(x)\right) + 2\left(u(x) * sen(x)H(x)\right) = 0$$

Aplicamos la transformada de Laplace a ambos lados de la ecuación, tomando $\mathscr{L}[u(x)] = U(z)$

$$-\frac{d}{dz}[zU(z)] + 2U(z)\left(\frac{1}{z^2+1}\right) = 0$$

$$-zU'(z) - U(z) + 2\left(\frac{U(z)}{z^2+1}\right) = 0$$

$$U(z)\left(\frac{2-z^2-1}{z^2+1}\right) = zU'(z)$$

$$\frac{dU}{U} = \left(\frac{1-z^2}{z(z^2+1)}\right)dz$$

Reescrbiendo es fracciones simples

$$\frac{dU}{U} = \left(\frac{1}{z} - \frac{2z}{1+z^2}\right)dz$$

Integrando a ambos lados de la ecuación obtenemos

$$Ln(U) = Ln(z) - Ln(1+z^2) + Ln(k)$$

$$Ln(U) = Ln\left(\frac{kz}{1+z^2}\right) \longrightarrow U(z) = \frac{kz}{1+z^2}$$

Tomando transformada inversa y considerando $f(x)$ causal

$$f(x) = \mathscr{L}^{-1}\left(\frac{kz}{1+z^2}\right) \longrightarrow f(x) = kH(x)cos(x)$$

Sustituimos la condición inicial $\boxed{f(0) = k = 1}$
Finalmente, la solución causal al problema es

$$\boxed{\text{f(x) = H(x)cos(x)}}$$

Pregunta 4 (14 puntos) Para hallar una función anticausal y (x) que satisfaga la ecuación

$xy''(x) + (1-2x)y'(x) - 2y(x) = 0$ y las condiciones $y(0) = 1$ y $y'(0) = 2$:

(a) Calcule la transformada de Laplace de la función $H(-x)$

(b) Halle la solución que tenga la forma $y(x) = u(x)H(-x)$

<u>Solución</u>

a. Calculamos $\mathscr{L}\left(H(-x)\right)(z)$.

$$\mathscr{L}\left(H(-x)\right)(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(-x)e^{-zx}\,dx = \int_{-\infty}^{0} e^{-zx}\,dx = -\left.\frac{e^{-zx}}{z}\right|_{-\infty}^{0} = -\frac{1}{z}+\frac{1}{z}\cancelto{0}{\lim_{x\to-\infty} e^{-zx}}$$

$$= -\frac{1}{z}, \qquad Re(z) < 0$$

Así,

$$\boxed{H(-x) \xrightarrow{\mathscr{L}} -\frac{1}{z}, \qquad Re(z) < 0}$$

b. Multiplicamos por $H(-x)$ a ambos lados de la ecuación dada:

$$xH(-x)y''(x) + (1-2x)H(-x)y'(x) - 2H(-x)y(x) = 0 \qquad \text{(III)}$$

Hacemos $u(x) = H(-x)y(x)$

$$u'_{gen}(x) = H(-x)y'(x) + \delta u(0)\delta(x) \;\longrightarrow\; \delta u(0) = \lim_{x\to 0^+} u(x) - \lim_{x\to 0^-} u(x) = 0 - y(0) = -1$$

$$u'_{gen}(x) = H(-x)y'(x) - \delta(x) \;\longrightarrow\; H(-x)y'(x) = u'_{gen}(x) + \delta(x)$$

$$u''_{gen}(x) = H(-X)y''(x) - \delta(x) - 2\delta(x) \;\longrightarrow\; H(-x)y''(x) = u''_{gen}(x) + \delta(x) + 2\delta(x)$$

Sustituyendo en la ecuación (III):

$$x[u''_{gen}(x) + \delta(x) + 2\delta(x)] + (1-2x)[u'_{gen}(x) + \delta(x)] - 2u(x) = 0$$

$$xu''_{gen}(x) + x\delta(x) + \cancel{2x\delta(x)} + u'_{gen}(x) + \delta(x) - 2xu'_{gen}(x) - \cancel{2x\delta(x)} - 2u(x) = 0$$

Aplicamos transformada de Laplace a ambos lados de la ecuación:

$$\mathscr{L}\left(xu''_{gen}(x) + x\delta(x) + u'_{gen}(x) + \delta(x) - 2xu'_{gen}(x) - 2u(x)\right)(z) = 0$$

Tomando $u(x) \xrightarrow{\mathscr{L}} F(z)$

$$\frac{-d}{dz}\left(z^2F(z)\right) - 1 + zF(z) + 1 + 2\frac{d}{dz}\left(zF(z)\right) - 2F(z) = 0$$

$$-2zF(z) - F'(z)z^2 + zF(z) + \cancel{2F(z)} + 2zF'(z) - \cancel{2F(z)} = 0$$

$$F'(z)z(2-z) = zF(z) \;\longrightarrow\; F'(z)(2-z) = F(z)$$

$$\frac{dF}{F} = -\frac{dz}{z-2} \;\longrightarrow\; Ln(F) = -Ln(z-2) + Ln(c) = Ln\left(\frac{c}{z-2}\right)$$

$$F(z) = \frac{c}{z-2}$$

Aplicamos Transformada inversa de Laplace, recordando:

$$e^{\alpha x}u(x) \xrightarrow{\mathscr{L}} U(z-\alpha), \text{ en nuestro caso } \alpha = 2.$$

Del inciso anterior sabemos que:

$$H(-x) \xrightarrow{\mathscr{L}} -\frac{1}{z},\; Re(z) < 0$$

Por lo tanto:

$$\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{c}{z-2}\right)(x) = -ce^{2x}H(-x) = y(x) \;\longleftarrow\; \text{anticausal}$$

Sustituyendo el valor de la condición inicial:

$$y(0) = -c = 1 \;\longrightarrow\; \boxed{\text{c = -1}}$$

Finalmente,

$$\boxed{y(x) = e^{2x}H(-x)}$$